物理学基礎論Ａ　レポート問題（阪上）

2018 年 5 月 22 日

[1] 重力と空気抵抗をうけた質量 m の物体の落下運動は運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - D\,v^2 \tag{1}$$

で与えられる．ここで v は鉛直下向きの速度，D は抵抗係数，g は重力加速度である．この物体の落下速度 v は充分に時間がたつと終端速度 $v_\infty \equiv \sqrt{\dfrac{mg}{D}}$ に近づいていく．またこの終端速度を用いると運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D}{m}\,(v_\infty^2 - v^2) \tag{2}$$

と表すことができる．物体の速度が終端速度に近づくようすを調べるため，落下速度 v を

$$v = v_\infty + \Delta\,v \tag{3}$$

を置いてみる．物体の速度は終端速度に近く $v_\infty \gg \Delta\,v$ が成り立つ．式 (3) を方程式 (2) に代入し，$\Delta\,v$ の 2 乗を無視すると

$$\frac{d\,\Delta\,v}{dt} = -\frac{\Delta\,v}{\tau} \tag{4}$$

を書き換えられることを示せ．また緩和時間 τ を m, g, D で表せ．

[2] 設問 [1] で求めた緩和時間 τ は，物体の速度が終端速度に近づく時間スケールを表している．次元解析により，τ が時間の次元であることを示せ．

[**3**] 運動方程式 (2) は変数分離形の微分方程式である．物体を静かに放し落下させたとする．この微分方程式を解き，時刻 t での落下速度 $v(t)$ および落下距離 $x(t)$ が

$$\begin{aligned} v(t) &= v_\infty \, \frac{e^{2t/\tau} - 1}{e^{2t/\tau} + 1} = v_\infty \, \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \\ x(t) &= v_\infty \, \tau \, \ln \left(\frac{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}}{2} \right) \end{aligned}$$

で与えられることを示せ.