

特殊相対論 テンソル演習問題 (阪上)

2016年11月30日

[1] Lorentz 変換

Lorentz 変換

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = a^{\alpha}_{\mu} a^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2)$$

は、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 & a^0_3 \\ a^1_0 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_0 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_0 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列表示を用いると、

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (3)$$

$$Y = A^T Y A \quad (4)$$

と表せる。ただし、 A^T は A の転置行列である。以下の設問に答えなさい。

- (a) x 方向への boost に対して変換行列 A を具体的に書き下し、さらに (4) 式が成り立つことを示しなさい。
- (b) z 軸回りの角度 θ の回転は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

で与えられる。これが Lorentz 変換の条件 (4) をみたすことを示しなさい。

- (c) Lorentz 変換が群の性質をみたすことを示しなさい。

[2] Lorentz 逆変換

- (a) Lorentz 変換 (1) の逆変換を $x^\mu = (a^{-1})^\mu_\nu x'^\nu$ とすると

$$(a^{-1})^\mu_\nu = \eta_{\nu\alpha} a^\alpha_\beta \eta^{\beta\mu} \quad (6)$$

であることを確かめなさい。

- (b) $(a^{-1})^\alpha_\mu (a^{-1})^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta}$ を計算し、計量テンソルが Lorentz 変換に対して不変であることを示しなさい。
- (c) x 方向の boost に対して (6) 式を具体的に計算し、逆変換になっていることを確かめなさい。

[3] テンソル積と縮約

- (a) 反変ベクトル B^μ 、共変ベクトル C_μ は Lorentz 変換 $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ に対して

$$B'^\mu = a^\mu_\nu B^\nu, \quad C'_\mu = (a^{-1})^\nu_\mu C_\nu$$

と変換する。テンソル積 $B^\mu C_\nu$ が (1,1) テンソルとして変換することを示しなさい。

- (b) 上のテンソルの縮約をとった $B^\mu C_\mu$ がスカラーとして変換することを示しなさい。
- (c) 反変ベクトル B^μ と計量テンソルから作られる $B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu$ が、共変ベクトルであることを示しなさい。
- (d) 座標ベクトル $x^\mu = (ct, x, y, z)$ に対して上の (c) の操作で得られる共変ベクトル $x_\mu = (-ct, x, y, z)$ が共変ベクトルの変換をすることを x 方向の boost について具体的に確かめなさい。

[4] 一般の方向への boost

3次元速度 v の方向への boost は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x/c \\ v_y/c \\ v_z/c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^T = (\beta_x \ \beta_y \ \beta_z)$$

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

をもちいて

$$A(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}^T \end{pmatrix} \quad (7)$$

という 4×4 行列表示で与えられる。ここで $\mathbf{1}$ は 3×3 単位行列、 $\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}^T$ は

$$\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}^T = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} \otimes (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{pmatrix} \beta_x \beta_x & \beta_x \beta_y & \beta_x \beta_z \\ \beta_y \beta_x & \beta_y \beta_y & \beta_y \beta_z \\ \beta_z \beta_x & \beta_z \beta_y & \beta_z \beta_z \end{pmatrix}$$

で定義される 3×3 行列である。

(a) $A(\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置いたものが x 方向の boost になることを示しなさい。

(b) $A(\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{pmatrix}$ とした x-y 面内での boost を x 方向の boost と z 軸まわりの回転 (5) から導きなさい。

(c) $A(\boldsymbol{\beta})$ が Lorentz 変換の条件 (4) をみたすことを示しなさい。

(d) $A(\boldsymbol{\beta})$ の逆変換を求めなさい。

[5] 電磁場テンソル

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

は(2,0)テンソルであることが知られている。ここで $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ は電場と磁場の各成分、 c は光速である。

- (a) x 方向の boost に対する電場と磁場の変換を具体的に求めなさい。
- (b) 電荷を帯びた物体が私たちに対して x 方向に速度 v で等速運動している。私たちの座標系を S 、物体の静止系を S' 系と呼ぶことにする。さて、電荷密度 ρ と電流密度の各成分 j_x, j_y, j_z からなる 4

元電流 $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ は反変ベクトルとして変換する。今の場合、物体の静止系では電荷密度は ρ' で与えられ、また電流密度はゼロであるが、 S 系では電荷密度 ρ とともに電流密度 j_x も存在し

$$c\rho' = c\gamma\rho - \beta\gamma j_x$$

という関係にある。 S' 系でのガウスの法則

$$\text{div}' \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$$

を Lorentz 変換し S 系ではガウスの法則とともにアンペールの法則

$$\text{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

が成り立つことを示しなさい。

(注) アンペールの法則の x 成分だけで良い。また S 系でもガウスの法則が成立することは用いて良い。