特殊相対論　テンソル演習問題（阪上）

2017 年 11 月 17 日

[1]Lorentz 変換

Lorentz 変換

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{1}$$

$$\eta_{\mu\nu} = a^{\alpha}{}_{\mu}\, a^{\beta}{}_{\nu}\, \eta_{\alpha\beta} \tag{2}$$

は、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a^0{}_0 & a^0{}_1 & a^0{}_2 & a^0{}_3 \\ a^1{}_0 & a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_0 & a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_0 & a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列表示を用いると、

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{3}$$

$$Y = A^{\mathrm{T}} Y A \tag{4}$$

と表せる。ただし、 A^{T} は A 　の転置行列である。以下の設問に答えなさい。

(a) x 方向への boost に対して変換行列 A を具体的に書き下し、さらに (4) 式が成り立つことを示しなさい。

(b) z 軸回りの角度 θ の回転は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

で与えられる。これが Lorentz 変換の条件 (4) をみたすことを示しなさい。

(c) Lorentz 変換が群の性質をみたすことを示しなさい。

[2] Lorentz 逆変換

(a) Lorentz 変換 (1) の逆変換を $x^\mu = (a^{-1})^\mu{}_\nu\ x'^\nu$ とすると

$$(a^{-1})^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\alpha}\ a^\alpha{}_\beta\ \eta^{\beta\mu} \tag{6}$$

であることを確かめなさい。

(b) $(a^{-1})^\alpha{}_\mu\ (a^{-1})^\beta{}_\nu\ \eta_{\alpha\beta}$ を計算し、計量テンソルが Lorentz 変換に対して不変であることを示しなさい。

(c) ｘ方向の boost に対して (6) 式を具体的に計算し、逆変換になっていることを確かめなさい。

[3] テンソル積と縮約

(a) 反変ベクトル B^μ、共変ベクトル C_μ は Lorentz 変換 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu\ x^\nu$ に対して

$$B'^\mu = a^\mu{}_\nu\ B^\nu, \qquad C'_\mu = (a^{-1})^\nu{}_\mu\ C_\nu$$

と変換する。テンソル積 $B^\mu C_\nu$ が (1,1) テンソルとして変換することを示しなさい。

(b) 上のテンソルの縮約をとった $B^\mu C_\mu$ がスカラーとして変換することを示しなさい。

(c) 反変ベクトル B^μ と計量テンソルから作られる $B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu$ が、共変ベクトルであることを示しなさい。

(d) 座標ベクトル $x^\mu = (ct, x, y, z)$ に対して上の（ｃ）の操作で得られる共変ベクトル $x_\mu = (-\ ct, x, y, z)$ が共変ベクトルの変換をすることをｘ方向の boost について具体的に確かめなさい。

[4] 一般の方向への boost

3次元速度　$\boldsymbol{v}$ の方向への boost は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x/c \\ v_y/c \\ v_z/c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{pmatrix}$$

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

をもちいて

$$A(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

という 4×4 行列表示で与えられる。ここで $\mathbf{1}$ は 3×3 単位行列、$\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ は

$$\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_x, \beta_y, \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_x\beta_x & \beta_x\beta_y & \beta_x\beta_z \\ \beta_y\beta_x & \beta_y\beta_y & \beta_y\beta_z \\ \beta_z\beta_x & \beta_z\beta_y & \beta_z\beta_z \end{pmatrix}$$

で定義される 3×3 行列である。

(a) $A(\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置いたものが x 方向の boost になることを示しなさい。

(b) $A(\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{pmatrix}$ とした x-y 面内での boost を x 方向の boost と z 軸まわりの回転 (5) から導きなさい。

(c) $A(\boldsymbol{\beta})$ が Lorentz 変換の条件 (4) をみたすことを示しなさい。

(d) $A(\boldsymbol{\beta})$ の逆変換を求めなさい。

[5] **電磁場テンソル**

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

は(2,0)テンソルであることが知られている。ここでE_x, E_y, E_z、B_x, B_y, B_zは電場と磁場の各成分、c は光速度である。

(a) x 方向の boost に対する電場と磁場の変換を具体的に求めなさい。

(b) 電荷を帯びた物体が私たちに対して x 方向に速度 v で等速運動している。私たちの座標系を S 、物体の静止系を S' 系と呼ぶことにする。さて、電荷密度 ρ と電流密度の各成分 j_x, j_y, j_z からなる4元電流 $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ は反変ベクトルとして変換する。今の場合、物体の静止系では電荷密度は ρ' で与えられ、また電流密度はゼロであるが、S 系では電荷密度 ρ とともに 電流密度 j_x も存在し

$$c\rho' = c\gamma\rho - \beta\gamma j_x$$

という関係にある。S' 系でのガウスの法則

$$\mathrm{div}'\boldsymbol{E'} = \frac{\rho'}{\epsilon_o}$$

を Lorentz 変換し S 系ではガウスの法則とともにアンペールの法則

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

が成り立つことを示しなさい。

（注）アンペールの法則の x 成分だけで良い。また S 系でもガウスの法則が成立することは用いて良い。